Exercice n° 1

$f(x)=x^2-x+1$; $g(x)=-x^2-2x+2$

● – Etudions la fonction f

Pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x)=2x-1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

- Etudions la fonction g

Pour tout $x \in IR$ on a : $g'(x)=-2x-2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$

● a) $f(x)-g(x)=(x^2-x+1)-(-x^2-2x+2)$

$=2x^2+x-1$

Etudions le signe du trinôme $2x^2+2x-1$ en effet :

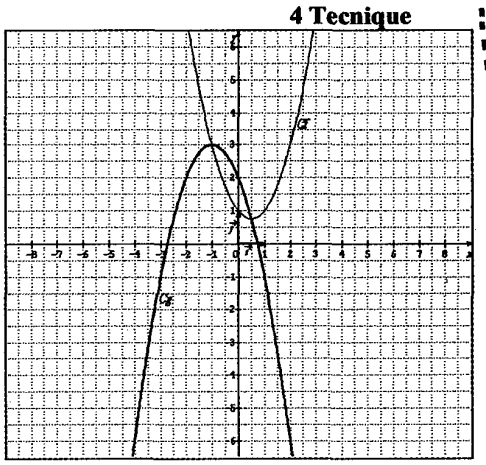
$2x^2+x-1=0$; on a : $a-b+c=0$

Donc x' = -1 et x" = $\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)-g(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
position	Cf/Cg		$(-1,3)$	Cg/Cf	$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$	Cf/Cg	

b/ C_f et Cg sont deux paraboles

4 Tecnique



Exercice n° 2 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$

a) Pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x)=x^3-4x=x(x^2-4)$

- Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
x^2-4		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

- Tableau des variations de f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{4}x^4=+\infty$

(On pourra remarquer que f est paire et on étudie f sur l'intervalle [0 , +∞[ )

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-2x^2=x^2(\frac{1}{4}x^2-2)=0$

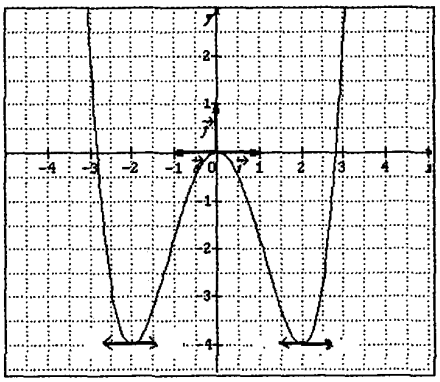
$\Leftrightarrow x^2=0$ *ou* $x^2=8 \Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=\pm 2\sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4x}=-\infty$

Donc Cf admet deux B I P de direction (yy') au Voisinage de + ∞ et de – ∞

d)



Exercice n° 3 $f(x)=x^3-4x^2+3x+1$

a) Pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x)=3x^2-8x+3$

$3x^2-8x+3=0; \Delta=b^2-4ac=28>0$

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+2\sqrt{7}}{6}=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-2\sqrt{7}}{6}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)=f(2.21)\simeq -1.11$

$f\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)=f(0.45)\simeq 2.44$

x	$-\infty$	$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$		$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2.44 ↗	↘	-1.11	↗ $+\infty$

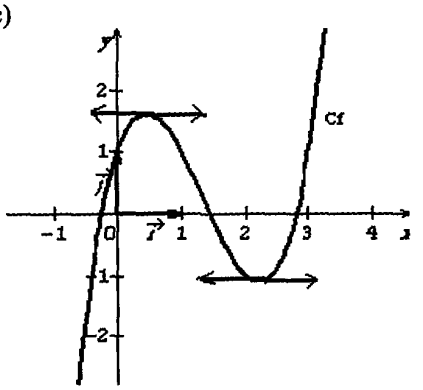
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=-\infty$

Donc Cf admet deux B I P de direction (yy') au

Voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

c)



Exercice n° 4 $f(x)=2x^3-6x$

● $x \in IR$, $-x \in IR$

$f(-x)=2(-x)^3-6(-x)=-2x^3+6x=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire et par suite le point O origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de f

● On étudie f sur IR_+

$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+	
$f(x)$	0 ↘		-4 ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty} 2x^3=+\infty$

3) a) $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-6x=2x(x^2-3)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2=3 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3}$

Donc : $Cf \cap (O,\vec{i})=\{O;(\sqrt{3},0);(-\sqrt{3},0)\}$

b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{2x^3}{x}=+\infty$

D'où Cf. admet une branche infinie parabolique

De direction (yy') au Voisinage de $+\infty$(de même en $-\infty$)

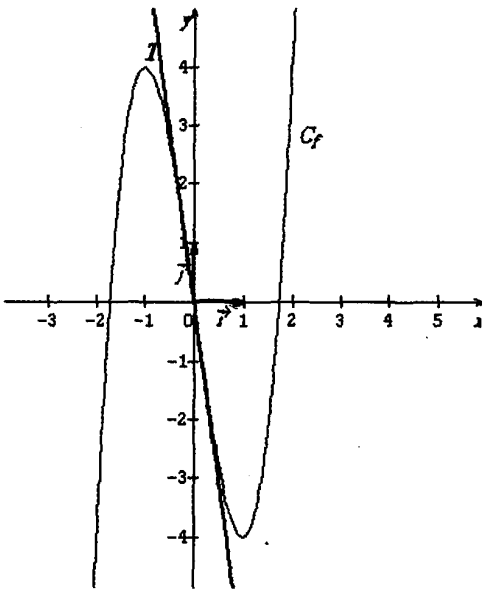
● a) T : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-6x$

$\Rightarrow \boxed{y=-6x}$

b) *Position de Cf. et sa tangente T :*
Etudions le signe de $f(x)-(-6x)=2x^3$

D'où : Pour $x>0$ Cf. Au dessus de T
Pour $x<0$ Cf. Au dessous de T

c)



Exercice n° 5 $f(x)=x^3-3x-1$

● $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) •• f est continue et strictement croissante sur

$]-\infty,-1[$ et $f(]-\infty,-1[)=\ ]-\infty,1[$

Comme $0 \in\ ]-\infty,1[$ donc l'équation $f(x)=0$ adm

une solution unique α_1 dans $]-\infty,-1[$

$f(-2)\simeq -3$ et $f(-1)\simeq 1$

$f(-2)\times f(-1)<0$ donc : $-2<\alpha_1<-1$

•• f est continue et strictement décroissante sur

$]-1,1[$ et $f(]-1,1[)=\ ]-3,1[$

Comme $0 \in\ ]-3,1[$ donc l'équation $f(x)=0$ adme

une solution unique α_2 dans $]-1,1[$

$f(0)\times f(-1)=(-1).1<0$ donc : $-1<\alpha_2<0$

•• f est continue et strictement croissante sur

$]1,+\infty[$ et $f(]1,+\infty[)=\ ]-3,+\infty[$

Comme $0 \in\ ]-3,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet

une solution unique α_3 dans $]1,+\infty[$

$f(2)\times f(1)=(-3).1<0$ donc : $1<\alpha_3<2$

Conclusion

L'équation $f(x)=0$ admet exactement les trois solutions α_1, α_2 et α_3 dans IR

● a) * $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=+\infty$

D'où Cf. admet une branche infinie parabolique

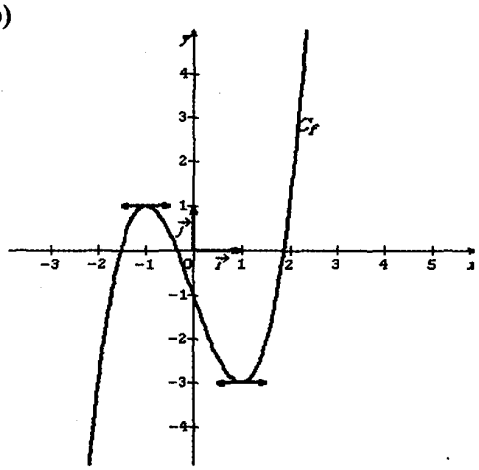
De direction (yy') au voisinage de $+\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x}=+\infty$

D'où Cf. admet une branche infinie parabolique

De direction (yy') au Voisinage de $-\infty$

b)



Exercice n° 6 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+10x^2-8x-1$

● $\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x^2-4x)-1=\dfrac{1}{2}\left(x^4-8x^3+20x^2-16x\right)-1$

$=\dfrac{1}{2}x^4-4x^3+10x^2-8x-1=f(x)$

Par suite $\forall x \in IR$ on a :

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x^2-4x)-1$

● $\forall x \in IR$; $4-x \in IR$ et

$f(4-x)=\dfrac{1}{2}(4-x-2)^2\left[(4-x)^2-4(4-x)\right]-1$

$$=\frac{1}{2}(2-x)^2\left[(4-x).(4-x-4)\right]-1$$

$$=\frac{1}{2}(x-2)^2\left[x^2-4x\right]-1=f(x)$$

D'ou : $-2-f(x)\neq f(4-x)$ ce qui prouve que le point W (2 , – 1) n'est pas un centre de symétrie pour *Cf.* donc il faut rectifier la question comme suit :

Montrer que la droite Δ d'équation x=2 est un axe de symétrie pour C_f

3) a) **rectifier W(2 ;0)**

Soit M (x, *y*) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

et Posons M (X, Y) relativement au repère $(W,\vec{i},\vec{j})$

On a :

$$\overrightarrow{WM}=\overrightarrow{WO}+\overrightarrow{OM}=-2\vec{i}+x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$=(x-2)\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{i}+Y\vec{j}$$

Donc on aura $\begin{cases}X=x-2\\Y=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=X+2\\y=Y\end{cases}$

$M\in Cf \Leftrightarrow y=f(x)$

Remplacent x et *y* en fonction de X et Y dans l'expression de $f(x)$:

$$Y=\frac{1}{2}X^2\left[X^2-4\right]-1=\frac{1}{2}X^4-2X^2-1$$

Donc $F(X)=\frac{1}{2}X^4-2X^2-1$

b) $X\in IR$; $-X\in IR$ et $F(-X)=F(X)$ donc F est une fonction paire ,on pourra donc étudier F sur IR_+

$F'(X)=2X^3-4X=2X.(X^2-2)$

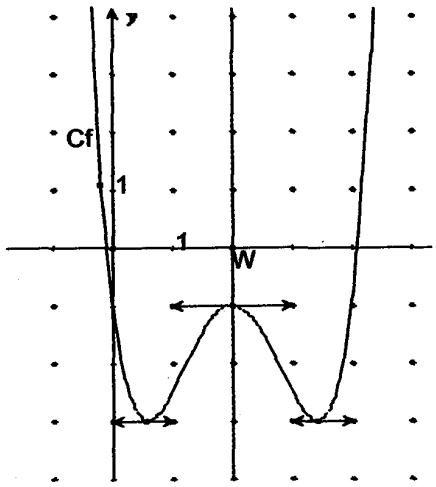
$$\lim_{X\to+\infty}F(X)=\lim_{X\to+\infty}2X^3=+\infty$$

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{F(X)}{X}=\lim_{X\to+\infty}2X^2=+\infty$$

D'où C_F. admet une branche infinie parabolique De direction (yy') au voisinage de $+\infty$

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$F'(x)$	–	0	+
$F(x)$	-1 ↘	-3	↗ $+\infty$

c) On trace C_F dans le repère $(W,\vec{i},\vec{j})$ on obtient *Cf*



Exercice n° 7

f est définie si et seulement si $x^2-4x+3\neq0$

Or puisque a + b +c = 0 on aura

$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x'=1$ *ou* $x''=3$

Donc $Df=IR\setminus\{1,3\}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

On a :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
Signe de x^2-4x+3	+	0	– 0	+

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\geq0}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{18}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\leq0}}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

● les asymptotes de C_f sont les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$ et $y = 1$

●

$$f'(x) = \frac{(x^2+3x)'(x^2-4x+3)-(x^2+3x)(x^2-4x+3)'}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2-4x+3)-(x^2+3x)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-7x^2+6x+9}{(x^2-4x+3)^2}; x \in Df$$

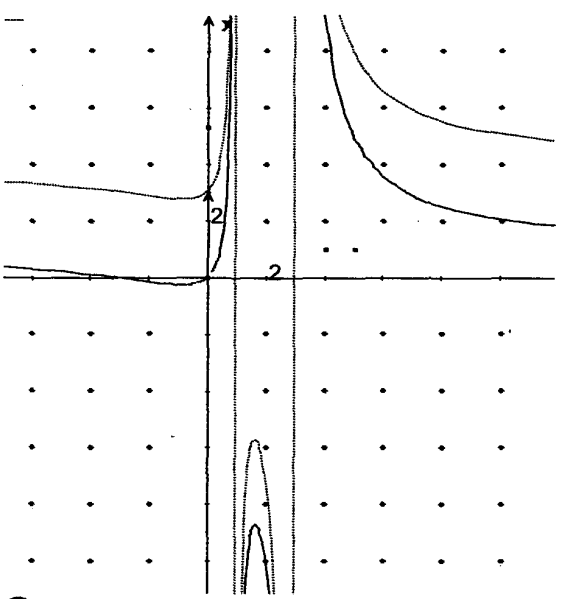
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -7x^2+6x+9 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = 9+9.7 = 8.9 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 6\sqrt{2}$

$x' = x' = \frac{3-6\sqrt{2}}{7} \simeq -0,78$ et $x'' = \frac{3+6\sqrt{2}}{7} \simeq 1,6$

x	$-\infty$	x'		1		x''	3	$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	+	0	−	−
$f(x)$	1	↘	-0.3	↗	$-\infty$	↗	-8.7 ↘ $-\infty$	↘ 1

●



● on pourra remarquer graphiquement que C_f n'admet pas un axe de symétrie **erreur**

● a) $\forall x \in IR \setminus \{1,3\}$

$$g(x) - f(x) = \frac{4x^2-9x+9}{x^2-4x+3} - \frac{x^2+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3x^2-12x+9}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{3(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3} = 3 \Rightarrow g(x) = f(x)+3$$

b) On obtient C_g par translation de C_f de vecteur $3\vec{j}$

c) voir repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

d)

x	$-\infty$	x'		1		x''	3	$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	+	0	−	−
$f(x)$	4	↘	2.7	↗	$-\infty$	↗	-5.7 ↘ $-\infty$	↘ 4

Exercice n° 8

$$f(x) = \frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}$$

● a) f est définie si et seulement si $|x+1|-|x-1| \neq 0$

Or $|x+1|-|x-1| = 0 \Leftrightarrow |x+1| = |x-1|$

$\Leftrightarrow x+1 = x-1$ *ou* $x+1 = -(x-1) = -x+1$

$\Leftrightarrow 1 = -1$ *ou* $x = 0$ *d'où* $Df = IR^*$

impossible

b) $x \in IR^*$, $-x \in IR^*$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x+1|-|-x-1|} = \frac{x^2}{|-(x-1)|-|-(x+1)|}$$

$$= \frac{x^2}{|-a| = |a|\ |x-1|-|x+1|} = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

● Ecrivant $f(x)$ sans le symbole valeur absolue

x	$-\infty$		-1		1	$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+
$\lvert x+1 \rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$x-1$		−		−	0	+
$\lvert x-1 \rvert$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$

Don on aura :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{x^2}{2} & si \leq 1 \\ f(x) = \frac{x}{2} & si -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$

D'où f admet un prolongement par continuité noté g tel que : $g : x \to \begin{cases} g(x) = f(x) & si\ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

● a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\not x}{2\not x} = \frac{1}{2}$

Donc g est dérivable en 0 et g' (0) = $\frac{1}{2}$

b) $g'(x)=\begin{cases} -x & pour\ x\le -1 \\ \frac{1}{2} & pour\ -1\le x\le 1 \\ x & pour\ x\ge 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x^2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2=+\infty$

a)

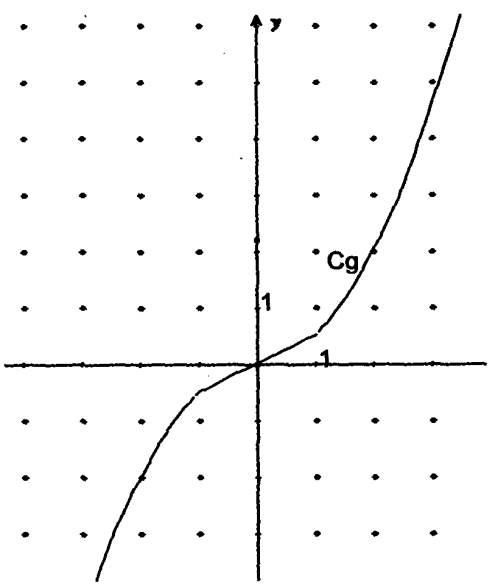
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$

* Cg admet une B I Parabolique au *Voisinage de* $-\infty$ *de direction* $(o\vec{j})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$

* Cg admet une B I Parabolique au *Voisinage de* $+\infty$ *de direction* $(o\vec{j})$

b)



Exercice n° 9 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x+1}$

a) $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x+1}=\frac{x^2+2x+1-2}{x+1}$

$=\frac{(x+1)^2-2}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{x+1}-\frac{2}{x+1}=x+1-\frac{2}{x+1}$

2ème méthode :

$f(x)=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=2 \\ b+c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2-b \\ b=-1-c \end{cases}\Leftrightarrow a=b=1 \text{ et } c=-2$

Donc $f(x)=x+1-\frac{2}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2}{x+1}=0$

Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ C_f admet la droite Δ d'équation : $y=x+1$ comme asymptote oblique.

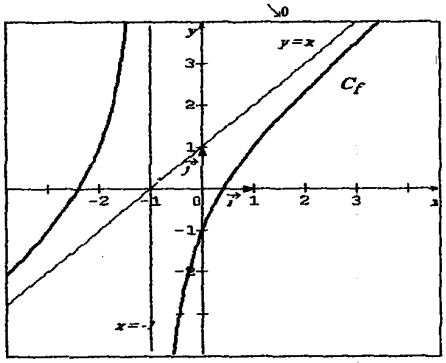
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ donc la droite D'équation : x=-1 est une asymptote verticale à Cf

$f'(x)=1+\frac{2}{(x+1)^2}>0\quad\forall x\neq -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1-\frac{2}{x+1}=+\infty$ ($+\infty$; $\to 0$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+1-\frac{2}{x+1}=-\infty$ ($-\infty$; $\to 0$)



Exercice n° 10 $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$

a) $Df.=\mathbb{R}^*$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ est

$f'(x)=\frac{(x^4)'x^2-(x^2)'(x^4-1)}{x^4}=\frac{4x^3x^2-2x(x^4-1)}{x^4}$

$f'(x)=\frac{4x^5-2x^5+2x}{x^4}=\frac{2x(x^4+1)}{x^4}$ a le signe de x

f est une fonction paire ($f(-x)=f(x)$).
On étudie f sur IR^*_+

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

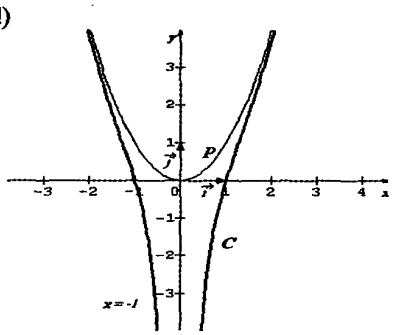
C admet une BIP au *Voisinage de* $-\infty$ *de direction* $(o\vec{j})$

b) P: $y=x^2$

c) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-x^2)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^2-\frac{1}{x^2}-x^2=0$

Au voisinage de l'infinie C se comporte comme P donc elle admet deux branches paraboliques infinies de direction $(O,\vec{j})$

d)



Exercice n° 11

a) $Df=IR$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=f(2)$

Donc f est continue à gauche en 2

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3}=f(2)$

Donc f est continue à droite en 2

Conclusion : f est continue en 2

b) • $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2}$$

On va factoriser l'expression x^3-3x-2
On sait que 2 est une racine de : $x^3-3x-2=0$
Donc $x^3-3x-2=(x-2).(x^2+ax+b)$
$=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$
Par identification on trouve : a = 2 et b = 1 ,d'où :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}(x^3-3x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{3}(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{3}.(x+1)^2=3$$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et on a : $f'_g(2)=3$

• $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\frac{x^2}{x+1}-\frac{4}{3}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\frac{x^2-4x-4}{3(x+1)}}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2-4x-4}{3(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(3x+2)(x-2)}{3(x-2)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+2}{3(x+1)}=\frac{8}{9}$$

Donc f est dérivable à droite en 2 et on a : $f'_d(2)=\frac{8}{9}$

Conclusion : f n'est pas dérivable en 2
Interprétation : Au point A(2 ;$f(2)$) Cf Possède :
* une demi –tg à gauche de Coefficient directeur 3
* une demi -tg à droite de Coefficient directeur $\frac{8}{9}$
(Le point A(2 ;$f(2)$) est un point anguleux.

a) On a pour $x\geq 2$:

$$ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}$$

$$\frac{ax^2+(a+b)x+c}{x+1}=f(x)=\frac{x^2}{x+1}\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a+b=0\\b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\text{ et }c=-2\\c=1\end{cases}$$

Donc $\boxed{f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}}$

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

Au voisinage de $+\infty$:C_f admet la droite D d'équation : y = x + 1 comme asymptote oblique

• $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+1}>0$ pour $x\geq 2$ donc

C_f est au dessus de D sur $[2;+\infty[$

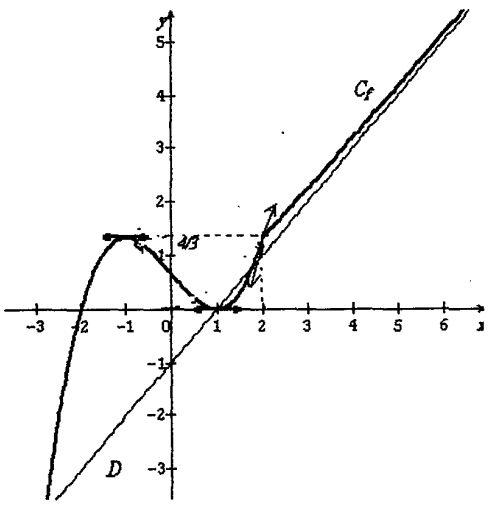
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=+\infty$

Au voisinage $-\infty$ C_f admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$

• Variation de f :
f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,2]$ *et* $[2,+\infty[$; on a :

$$\begin{cases} f'(x)=x^2-1 & x<2 \\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} & x>2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	+		0		−	0	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	$4/3$	↘	0	↗	$+\infty$	‖	$\frac{1}{3}$



Exercice n° 12 $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

● $Df=\{x\in IR;(x-1)^2\neq 0\}=IR-\{1\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

● a) On a

$$ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

Par identification on aura : $\begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=0\Rightarrow b=-1 \\ c-b=0\Rightarrow b=-1 \end{cases}$

D'ou $\forall x\in IR-\{1\}: f(x)=x-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty \Rightarrow$ la droite x = 1 est une asymptote

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=0$$

Ce qui prouve que la droite d'équation : y = x est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

2) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $Df=IR-\{1\}$ et on a :

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)^4+(x-1)^2+2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(x-1)^3+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

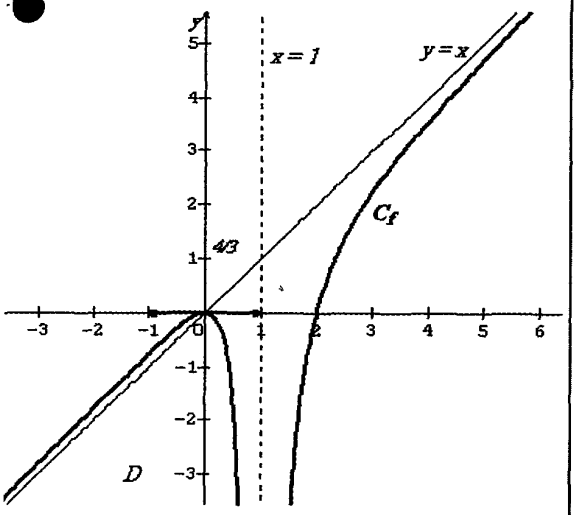
$$=\frac{(x-1)\left[(x^3-3x^2+3x-1+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)(x^3-3x^2+4x)}{(x-1)^4}$$

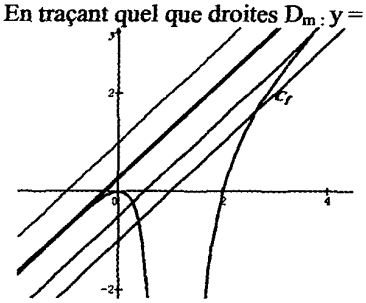
$$=\frac{x(x-1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^4}$$

Or pour le signe de x^2-3x+4 ,on a $\Delta=9-16<0$ donc $x^2-3x+4>0$ et par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-1)$ d'ou le tableau de variation de f *suivant* :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		0	−	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	$+\infty$



En traçant quel que droites $D_m : y = x + m$



On remarque que :

- Si $m = \frac{1}{4}$ ou m=0 : un seul point d'intersection
- Si $m < \frac{1}{4}$ et $m \neq 0$: deux points d'intersection
- Si $m > \frac{1}{4}$: aucun point d'intersection

Exercice n° 13 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

a) $Df = \{x \in IR ; x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
Signe de $x^2 - 2x - 3$	+	0	−	0	+

D'où $\boxed{Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[}$

b) $x \to x^2 - 2x - 3$: est continue et $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ pour tout $x \in Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$ donc la fonction f est continue sur $Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$

b)

$$\bullet \lim_{x \to (-1)^-} \frac{f(x) - f(1)}{x + 1} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}^2}{(x+1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{(x \neq 1)(x-3)}{(x \neq 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{(x-3)}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Donc f non dérivable à gauche en (– 1)

Interprétation : C_f admet au point (-1 ;0) une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

$$\bullet \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 0}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}^2}{(x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$= \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Donc f non dérivable à droite en 3

Interprétation : C_f admet au point $(3 ; \hat{0})$ une demi - tangente verticales de même sans que $\vec{j}$

c) $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 3 = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 2x - 3 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

b)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	−	‖	‖	‖	‖	+	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	‖	0	‖	0	↗	$+\infty$

a) Pour tout $x \in Df =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$ on a

$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$

Donc $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x + 1] = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 3} - (x - 1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2 - 4}^2 - (x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 - 4} + (x-1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2 - 4 - (x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 - 4} + x - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(x-1)^2 - 4} + x - 1}_{+\infty}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{(-x+1)^2 - 4} - (-x + 1)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(-x+1)^2-4}^2-(-x+1)^2}{\sqrt{(-x+1)^2-4}+(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x+1)^2-4-(-x+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2-4}+x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(-x+1)^2-4}}_{+\infty}-x+1} = 0$$

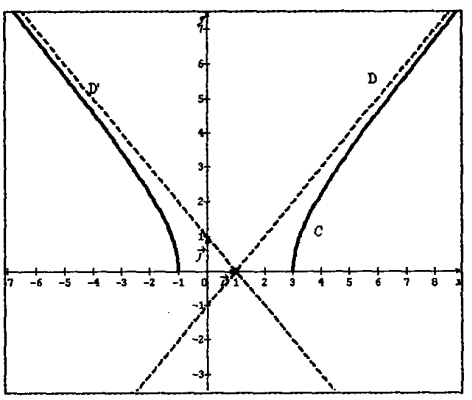
c) on a • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ donc

La courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ d'équation : $y = x-1$

• on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x+1)=0$ donc

La courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de $-\infty$ d'équation : $y = -x+1$

4)



Exercice n° 14 $f(x)=\sqrt{(x-2)^2-1}$

● On a :

$(x-2)^2-1\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}\geq 1$

$\Leftrightarrow |x-2|\geq 1 \Leftrightarrow x-2\leq -1$ *ou* $x-2\geq 1$

$\Leftrightarrow x\leq 1$ *ou* $x\geq 3$

Donc : $Df =]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

● a) $x\leq 1 \Rightarrow 2-x\geq 3$ ∘ $x\geq 3 \Rightarrow 2-x\leq 1$

Donc

$x\in Df \Rightarrow 4-x\in Df$

$f(4-x)=\sqrt{(4-x-2)^2-1}=\sqrt{(2-x)^2-1}=\sqrt{(x-2)^2-1}$

$\Rightarrow f(2\times 2-x)=f(x)$ d'où la droite D: $x=2$ est un axe de symétrie pour la courbe C

b) f est dérivable sur $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ et on a

$$f'(x)=\frac{((x-2)^2-1)'}{2\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{2(x-2)}{2\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{x-2}{\sqrt{(2-x)^2-1}}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	0	↗	$+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(x-2)^2-1}-(x-2)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-2)^2-1}^2-(x-2)^2}{\sqrt{(x-2)^2-4}+(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2-4-(x-2)^2}{\sqrt{(x-2)^2-1}+x-2}$$

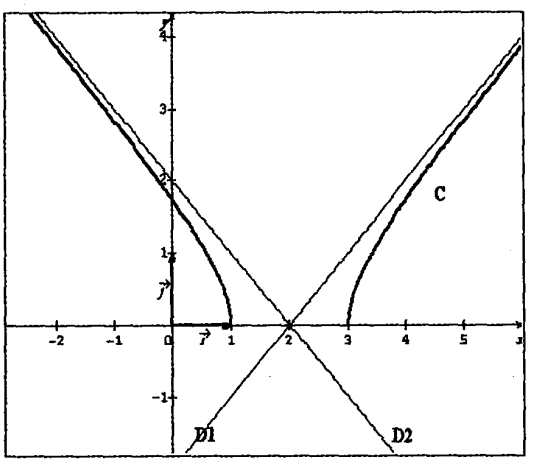
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\underbrace{\sqrt{(x-2)^2-4}+x-2}_{+\infty}} = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ ce qui prouve que

La droite Δ_1 d'équation : $y = x-2$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x-2)=0$ ce qui prouve que

La droite Δ_2 d'équation : $y = -x+2$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$



Exercice n° 15 $f(x)=1-\sqrt{x^2+x}$

● a)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de x^2+x	$+$		0	$-$	0		$+$

D'où $\boxed{Df =]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[}$

b)

$x\in Df \Rightarrow x<-1 ou x>0 \Rightarrow -1-x>0 ou -1-x<-1$

$\Rightarrow -1-x\in Df$

$f(-1-x)=1-\sqrt{(-1-x)^2-1-x}=1-\sqrt{x^2+x}$

$\Rightarrow f(2\times(-\frac{1}{2})-x)=f(x)$ D'où la droite

D: $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C

c) D: $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C donc on pourra étudier f sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\cap Df=[0,+\infty[$

a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{x^2+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x(x+1)}{x\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

f n'est pas dérivable en 0 .

Cf Possède une Demi tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0.

$$\forall x\in]0;+\infty[;f'(x)=0-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$=-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}<0$$

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	−
$f(x)$	1	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{+\infty}=-\infty$$

a)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(-x+\frac{1}{2})=\lim_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x^2+x})-(-x+\frac{1}{2})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\frac{1}{2})^2-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+\frac{1}{4}-x^2-x}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}_{+\infty}}=0$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)-(-x+\frac{1}{2})$ ce qui prouve que

La droite D d'équation : $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

b) $f(x)-(-x+\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}\geq 0$: C au dessus D

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x}$

$$\overset{|x|=-x \text{ pour } x\leq 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{x}=1$$

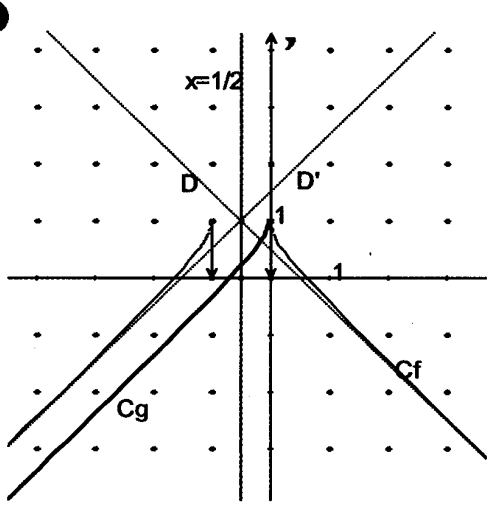
$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt{x^2+x}-x$

$$=\lim_{x\to-\infty}(1-x)-\sqrt{x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)^2-(x^2+x)}{1-x+\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x+x^2-x^2-x}{1-x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{1-x+\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{1}{x}-3)}{x(\frac{1}{x}-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}})}=\frac{3}{2}$$

Donc D': $y=x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique pour C_f au voisinage de $-\infty$



g est définie sur IR car $x^2+|x|\geq 0$

- Or pour $x\geq 0$ on a : $x=|x|$ donc $f(x)=g(x)$

D'où sur $[0,+\infty[$, la courbe de g ce coïncide avec C_f.

- $x\in IR,-x\in IR$ et $g(-x)=g(x)$

Donc g est paire, par suite C_g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice n° 16 $f_n(x)=x^n\sqrt{x-1}$

$f_n(x)=x^n\sqrt{x-1},n\in IN$

$Df_n=[1,+\infty[$

Sur $]1,+\infty[$: f_n est dérivable et on a :

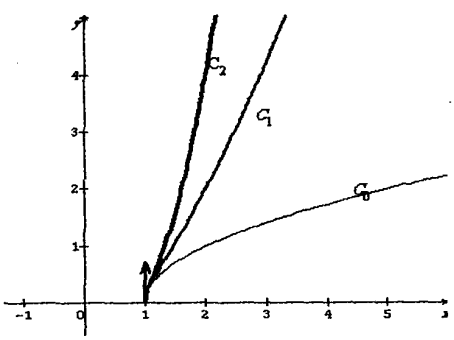
$$f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{x-1} + x^n \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2nx^{n-1}(x-1)+x^n}{2\sqrt{x-1}} = \frac{x^{n-1}\left[\underbrace{2n(x-1)+x}_{\geq 0}\right]}{2\sqrt{x-1}}, n \geq 1$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-1}\sqrt{x-1} = +\infty$; n≥1

Au voisinage $+\infty$ C_{f_n} Admettent une branche parabolique infinie de direction $(O,\vec{j})$ pour n≥1



Exercice n° 17 $f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$

on sait que ; $x \to \sin(ax+b)$ est $\frac{2\pi}{|a|}$ périodique a≠0

Donc $\frac{2\pi}{2} = \pi$ est une période de $f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$ 2)

a) $f'(x) = 2\cos(2x + \frac{2\pi}{3}); x \in IR$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x + \frac{2\pi}{3}) = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

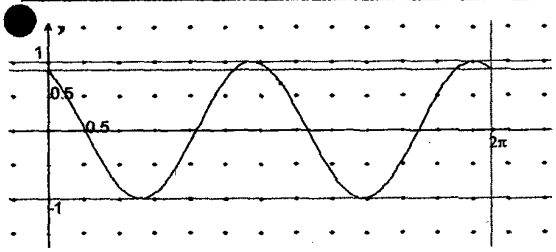
Or : $0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \pi$

$\Leftrightarrow 0.16 \simeq \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{13}{6} \simeq 2.16 \Leftrightarrow$ k = 1 ou k = 2

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12}$ *ou* $x = \frac{11\pi}{12}$

b)

x	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f'(x)$	−	0	+ 0	−
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↘	−1	↗ 1	↘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



- *si* $k > 1$ *ou* $k < -1 \Rightarrow 0$ *solution*
- *si* $k = 1$ *ou* $k = -1 \Rightarrow 2$ *solutions*
- *si* $k \in]-1;1[\setminus \{\frac{\sqrt{3}}{2}\} \Rightarrow 4$ *solutions*
- *si* $k = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 5$ *solutions*

Exercice n° 18

$x \in IR, f(x) = \sin 2x - 2\sin x$

$x \in IR, -x \in IR$ *et* $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x)$

$= -\sin 2x + 2\sin x$

$= -(\sin 2x - 2\sin x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Donc g est impaire

• le plus petit réel strictement positif T vérifiant $f(x+T) = f(x)$ *est* $T = 2\pi$ .donc f est 2π-périodique

f est de période 2π donc on pourra étudier *f* sur l'intervalle $Df \cap [-\pi,\pi] = IR \cap [-\pi,\pi] = [-\pi,\pi]$

De plus *f* est impaire par la suite on étudie *f* sur $[0,\pi]$

• On a : $f'(x) = 2\cos 2x - 2\cos x$, or $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Ce qui donne : $f'(x) = 2(\cos^2 x - \cos x - 1)$

Posons cos*x* = t on trouve :

$$\begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = 1 \text{ ou } t'' = -\frac{1}{2}, car : a+b+c = 0 \\ t = \cos x \end{cases}$$

donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$ *ou* $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x \in [0,\pi]$

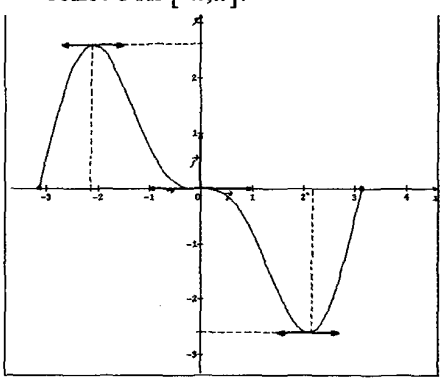
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Conclusion $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=\frac{2\pi}{3}$

Tableau des variations de f :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		−	‖	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0

• Courbe C sur $[-\pi,\pi]$:



Exercice n° 19 f(x)=sin x+cos²x

● $x \in IR, x+2\pi \in IR$ *et*

$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\cos^2(x+2\pi)$

$=\sin x+\cos^2 x=f(x)$

Donc f est 2π- périodique

● $x \in IR, 2\times\frac{\pi}{2}-x=\pi-x \in IR$

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\cos^2(\pi-x)$

$=\sin x+(-\cos x)^2=\sin x+\cos^2 x$

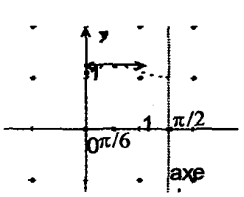
$=f(x)$

Donc la droite $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f

3) g restriction de f à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x)=\cos x-2\cos x.\sin x=\cos x(1-2\sin x)$ a le même signe que 1-2sin x

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)		+	‖	−	
g(x)	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1



Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

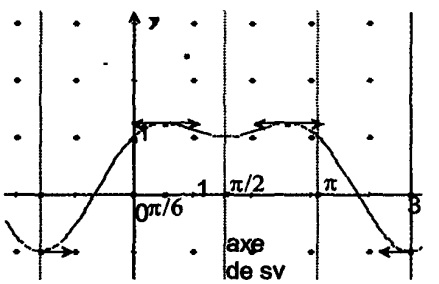
Tableau des variations de h :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0
$h'(x)$	‖	+	
$h(x)$	-1	↗	1

Soit C' la réunion de C_h et C_g

La courbe de la restriction de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ est la réunion de C' et $S_\Delta(C')$ avec $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$

Courbe Cf sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$:



Exercice n° 20 g(x)=tg(x)-x

● g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$g'(x)=1+tg^2x-1=tg^2x \geq 0$

$g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx-x=+\infty-\frac{\pi}{2}=+\infty$

Tableau des variations de g :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)	+		‖
g(x)	0	↗	+∞

On constate que 0 est un minimum global pour g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $g(x)\geq 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

● $\forall x \in IR^*, \left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \leq 1 \Rightarrow |x|.\left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \leq |x|$

$\Rightarrow \left|x\sin\frac{\pi}{x}\right| \leq |x|$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, par suite f est continue en 0

• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* et u (IR*) = IR*

Et la fonction $\sin x$ est continue sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* par suite $f(x)$ est continue sur IR* (produit de deux fonction continues)

Finalement : f est continue sur IR* et en 0 donc f est continue sur IR

• $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$

Pas de limite en 0 donc f non dérivable en 0

• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* et u (IR*) = IR*

et la fonction $\sin x$ est dérivable sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* par suite $f(x)$ est dérivable sur IR* (produit de deux fonction dérivables)

Conclusion : f est dérivable sur IR*

● h restriction de f sur $]2,+\infty[$

a)

$$h'(x)=\sin\frac{\pi}{x}+x\times(-\frac{\pi}{x^2})\times(-\cos\frac{\pi}{x})$$

$$=\sin\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$$

$$x\succ 2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\prec\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\prec\frac{\pi}{x}\prec\frac{\pi}{2}\ d'ou\ h'(x)\geq 0$$

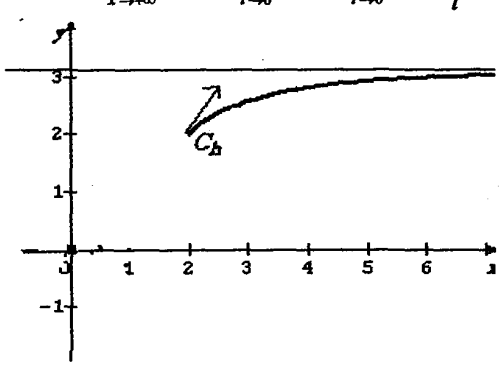
x	2		+∞
h'(x)	‖	+	
h(x)	‖ 2	↗	π

$$\lim_{x\to 2^+}h(x)=\lim_{x\to 2^+}x\sin\frac{\pi}{x}=2\times 1=2$$

Posons $t=\frac{\pi}{x}, si\ x\to+\infty\ alors\ \frac{\pi}{x}\to 0\ et\ x=\frac{\pi}{t}$

Donc $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{t\to 0}h(t)=\lim_{t\to 0}(\pi\times\frac{\sin t}{t})=\pi$

b)



c) h est continue et strictement croissante sur $]2,+\infty[$ donc h réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur $]2,\pi[$

Exercice n° 21 $f(x)=\sqrt{tg(x)}$

● f est dérivable sur $]O;\frac{\pi}{2}[$ et on a :

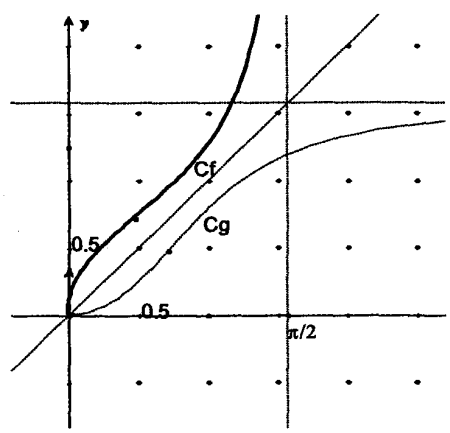
$$f'(x)=\frac{tg'(x)}{2\sqrt{tgx}}=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{tgx}}\succ 0$$

x	0		π/2
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖ 0	↗	+∞

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{tgx}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x\sqrt{tgx}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x}.\frac{1}{\sqrt{tgx}}=1\times\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc f est non dérivable à droite en 0 et Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut



● f est continue et strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

donc f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$

3) $g=f^{-1}$

a) Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut d'où Cg admet au point O une demi-tg horizontale d'où g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

f est dérivable sur $]O;\frac{\pi}{2}[$ et $f'(x)\neq 0\ \forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$,donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$

Conclusion : g est dérivable sur $[0,+\infty[$

* $\forall x\in]0;+\infty[\ ;g'(x)=\frac{1}{f'[(g)(x)]}$

$$=\frac{1}{\frac{1+tg^2(g(x))}{2\sqrt{tg(g(x))}}}=\frac{2\sqrt{tg(g(x))}}{1+tg^2(g(x))}\ (1)$$

Or: $fog(x)=\sqrt{tg(g(x))}=x \Rightarrow tg^2(g(x))=x^4$

Conclusion : $\boxed{g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}, \forall x \in [0,+\infty[}$

b) $f(0)=0$ donc $g(0)=0$

$g(1)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{tg\alpha}=1 \Leftrightarrow tg\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{g(1)=\frac{\pi}{4}}$

c) $\forall x \in]0,+\infty[$, *posons* : $F(x)=g(x)+g(\frac{1}{x})$

• $x \to u(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $u(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ et la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ ce qui prouve que $g(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par suite $F(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de deux fonction dérivables)

$$F'(x)=g'(x)+(g(\frac{1}{x}))'=g'(x)+(\frac{1}{x})'g'(\frac{1}{x})=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{1}{x^2}\times\frac{2}{x(\frac{x^4+1}{x^4})}$$

$$=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{x^3(\frac{x^4+1}{x^4})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{(\frac{x^4+1}{x})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2x}{1+x^4}=0$$

D'où $F'(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=k$ (constante)

Or $F(1)=g(1)+g(\frac{1}{1})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, g(x)+g(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}}$$

4) a) • $x \to \cos \pi x$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

Or: $\pi x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos \pi x \neq 0 \Rightarrow v(x)=\frac{1}{\cos \pi x}$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ et on a : $v'(x)=\frac{\pi \sin \pi x}{\cos^2 \pi x}$

• $x \in]-\frac{1}{2},0[\Rightarrow \sin \pi x \prec 0$

• $x \in]0,\frac{1}{2}[\Rightarrow \sin \pi x \succ 0$

Donc v est décroissante sur $]-\frac{1}{2},0[$ et elle est croissante sur $]0,\frac{1}{2}[$ par suite $v(]-\frac{1}{2},0[)=]1,+\infty[$ et $v(]0,\frac{1}{2}[)=]1,+\infty[$

Conclusion : $v(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)=]1,+\infty[$

Comme $]1,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et g est dérivable sur $]0,+\infty[$ il découle:

$g(\frac{1}{\cos \pi x})$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

• $\forall x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[: h'(x)=(\frac{1}{\cos \pi x})' g'(\frac{1}{\cos \pi x})$

$$h'(x)=\frac{\pi \sin \pi x}{\cos^2 \pi x}\times\frac{2\frac{1}{\cos \pi x}}{1+(\frac{1}{\cos \pi x})^4}=\frac{2\pi \cos \pi x.\sin \pi x}{1+\cos^4 \pi c}$$

Puisque sur, $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, $\cos \pi x \geq 0$ alors le signe de $h'(x)$ est celui de $\sin \pi x$ qui s'annule et change de signe en 0

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
$h'(x)$	‖	−	0	+	‖
$h(x)$	‖ $\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↗	‖ $\frac{\pi}{2}$

* $h(0)=g(\frac{1}{\cos 0})=g(1)=\frac{\pi}{4}$

* $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} \frac{1}{\cos \pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X \to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos X}=\frac{1}{0^+}+\infty$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} h(x)=\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} g(\frac{1}{\cos \pi x})=\frac{\pi}{2}$

* $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{1}{\cos \pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos X}=\frac{1}{0^+}+\infty$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} h(x)=\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} g(\frac{1}{\cos \pi x})=\frac{\pi}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} h(x)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} h(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc h est prolongeable par continuité et soit $H(x)$ le prolongement par continuité de h on a :

$$\begin{cases} H(x)=h(x) & x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\\ H(\frac{1}{2})=H(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice n° 22

a)

$\forall x \in IR, (\cos x)'=-\sin x$ *et* $(\cos^2 x)'=-2\cos x.\sin x$

$\Rightarrow (-2\cos^2+2\cos x+1)'=4\sin x \cos -2\sin x$

donc $\boxed{f'(x)=2\sin x(2\cos x-1)}$

b) $2\sin x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \; ou \; \cos x=\frac{1}{2}$

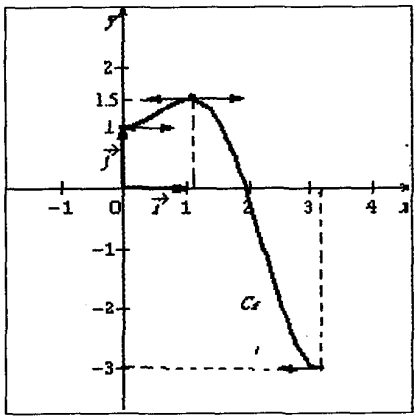
$\Leftrightarrow x=0 \; ou \; x=\pi \; ou \; x=\frac{\pi}{3}$ *dans* $[0;\pi]$

D'où $S_{[0,\pi]}=\{0,\pi,\frac{\pi}{3}\}$

c)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		−	0	+	0
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

d)



● a) g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur L'intervalle $J=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur L'intervalle $J=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

b) g est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et g' (x) $\neq 0$ pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{3},\pi\right[$ donc g^{-1} est dérivable sur $D=\left]-3,\frac{3}{2}\right[$

b) $t \in J$, on sait que : $gog^{-1}(t)=t$ donc on a :

$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1=t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1-t=0 \quad (E)$$

Dans l'équation (E) posons $\cos(g^{-1}(t))=X$ on aura :

$-2X^2+2X+1-t=0$ (E') *et* $X=\cos(g^{-1}(t))$

On va résoudre l'équation (E'). $-2X^2+2X+1-t=0$

$\Delta'=b'^2-ac=1+2(1-t)=3-2t\geq 0$ *car* $t\leq\frac{3}{2}$

D'où $\begin{cases} X'=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-1+\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2} \\ X''=\dfrac{-1-\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2} \end{cases}$

Ce qui donne $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2}\geq 0$

ou $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2}$

Or le cos change de signe sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et $g^{-1}(t) \in \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Donc : $\boxed{\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

On sait que : $\cos^2(g^{-1}(t))+\sin^2(g^{-1}(t))=1$ d'où

$$\sin^2(g^{-1}(t))=1-\cos^2(g^{-1}(t))$$
$$=1-\left(\frac{1-\sqrt{3-2t}}{2}\right)^2=\frac{4-(1-2\sqrt{3-2t}+3-2t)}{4}$$
$$=\frac{2t+2\sqrt{3-2t}}{4}=\frac{\overbrace{t+\sqrt{3-2t}}^{\geq 0}}{2}$$

Donc : $\boxed{\sin(g^{-1}(t))=\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

Calculons maintenant la dérivée de $g^{-1}(t)$

$$\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[:\ (g^{-1})'(t)=\frac{1}{g'(g^{-1}(t))}$$
$$=\frac{1}{2\sin g^{-1}(t).(2\cos g^{-1}(t)-1)}$$

Remplaçant $\sin(g^{-1}(t))$ et $\cos(g^{-1}(t))$ par les résultas (1) et (2) trouvées précédemment il résulte :

$$(g^{-1})'(t)=\frac{1}{2.\frac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}}\left(2.\frac{1-\sqrt{3-2t}}{2}-1\right)}\Rightarrow$$

$$\boxed{(g^{-1})'(t)=\frac{-1}{\left(\sqrt{2(\sqrt{t+\sqrt{3-2t}})(\sqrt{3-2t})}\right)},\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[}$$

Exercice n° 23 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{2+x}$

● a) $\forall x\neq -2$:

$$-x+2-\frac{3}{x+2}=\frac{4-x^2-3}{x+2}=\frac{1-x^2}{x+2}=f(x)$$

●

f est deux fois dérivables sur $IR\setminus\{2\}$ (fonction rationnelle)

$$f'(x)=(-x+2-\frac{3}{x+2})'=-1+\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=(-1+\frac{3}{(x+2)^2})'=-\frac{3\times 2(x+2)}{(x+2)^4}=-\frac{6(x+2)}{(x+2)^4}$$

Tableau des variations de f'

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		+	‖	−	
$f'(x)$	-1	↗ $+\infty$	‖ $+\infty$	↘	-1

Donc puisque $[-1,1]\subset]-2,+\infty[$ en déduire que f' est strictement décroissante sur $[-1,1]$

$$f'([-1,1])=\left[-\frac{2}{3},2\right]$$

d)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -1+\frac{3}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow (x+2)^2=3$$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{3}\ ou\ x+2=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{3}\ ou\ x=-2-\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$4+2\sqrt{3}$	↗	‖ $+\infty$	↗	$4-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \underbrace{-x}_{\nearrow(-\infty)}+2+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow+\infty}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{-x}_{\nearrow(+\infty)}+2+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow-\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+} \underbrace{-x+2}_{\to 4}+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow 0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-} \underbrace{-x+2}_{\to 4}+\underbrace{\frac{3}{x+2}}_{\searrow 0^-}=-\infty$$

e)

$$0\le x\le 1\Leftrightarrow 4\le (x+2)^2\le 9\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\frac{3}{(x+2)^2}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le -1+\frac{3}{(x+2)^2}\le -\frac{1}{4}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left|-1+\frac{3}{(x+2)^2}\right|\le\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)|\le\frac{2}{3},\forall x\in[0,1]$$

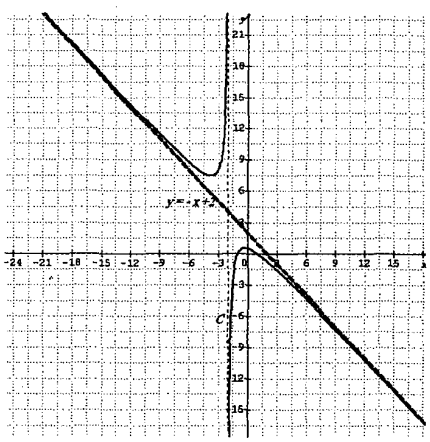
f) f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in[0,1]$ on a : $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $x\in[0,1]$ et $y\in[0,1]$: $|f(x)-f(y)|\le\frac{2}{3}|x-y|$

● Comportement de f au voisinage de l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3}{x+2}=0$$

$\Rightarrow y=-x+2$ est une asymptote oblique à C



● a) $t\in IR$,

$$g(\pi-t)=\frac{1-\sin^2(\pi-t)}{2+\sin(\pi-t)}\overset{(\sin(\pi-t)=\sin t)}{=}\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}=g(t)$$

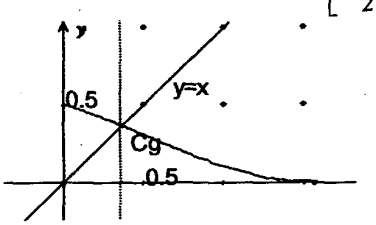
b) $g(\pi-t)=g(t)\Rightarrow$ la droite $\Delta: t=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C de plus g est de période 2π donc l'étude et la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe de g ;en effet C_g est la réunion des images de (C_1 UC_1') par les translations de vecteurs $k.2\pi\vec{i}$ $k\in\mathbb{Z}$ avec C_1 la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et C_1' =$S_\Delta(C_1)$

c) On remarque que g(t)=f(sin(t))
Donc g'(t)= sin'(t) .f'(sin(t))=cos(t).f'(sin(t))
Donc : $g'(t))=\cos t\times f'(\sin t)$

d)
$g'(t)) = 0 = \cos t \times f'(\sin t) \Rightarrow \cos t = 0$ *ou* $f'(\sin t) = 0$
Comme $\cos t \neq 0$ alors : $g'(t)) = 0 \Leftrightarrow f'(\sin t) = 0$
Or on sait que f est strictement décroissante sur $[-1,1]$ et $f'([-1,1]) = \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$
D'autre part la fonction sin est une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$
Donc la fonction t→f'(sin(t)) est une bijection strictement décroissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$
Et Comme $0 \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$ donc l'équation $f'(\sin t) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

e) $f'(\sin\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = -2+\sqrt{3}$ d'où
$$g(\alpha) = \frac{1-\sin^2\alpha}{2+\sin\alpha} = \frac{1-(4-4\sqrt{3}+3)}{1+2-\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}-6}{3-\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow g(\alpha) = -\frac{7}{2}+\sqrt{3}$$

f) g'(t) à le signe de $f'(t) \leq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



a) l'intersection de C_g et la droite y = x est le point d'abscisse 0.37 donc : g (t) = t donne t = 0.37

b) posons h (t) = g(t) – t

h' (t) = g ' (t) – 1 ≤ 0 d'où h est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $h\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right), h(0)\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right]$
Comme $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right]$ on aura l'équation g(t) – t = 0 admet une solution unique t_0 appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

5) a) g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a:
$|g'(x)| = |f'(\sin t) \times \cos t| \leq \frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
$: |g(u_n) - g(t_0)| \leq \frac{2}{3}|u_n - t_0| \Leftrightarrow |u_{n+1} - t_0| \leq \frac{2}{3}|u_n - t_0|$

b) • pour n = 0 on a : $|u_0 - t_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 |u_0 - t_0|$
Vrai car $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

• Supposons que $|u_n - t_0| \leq (\frac{2}{3})^n |u_0 - t_0|$ et montrons que $|u_{n+1} - t_0| \leq (\frac{2}{3})^{n+1} |u_0 - t_0|$, en effet :
$|u_{n+1} - t_0| \leq \frac{2}{3}|u_n - t_0|$ *et* $|u_n - t_0| \leq (\frac{2}{3})^n |u_0 - t_0|$
$\Rightarrow |u_{n+1} - t_0| \leq \frac{2}{3} \times (\frac{2}{3})^n |u_0 - t_0| \leq (\frac{2}{3})^{n+1} |u_0 - t_0|$
Donc d'après le principe de raisonnement par récurrence on a pour tout entier naturel n : $|u_n - t_0| \leq (\frac{2}{3})^n |u_0 - t_0|$

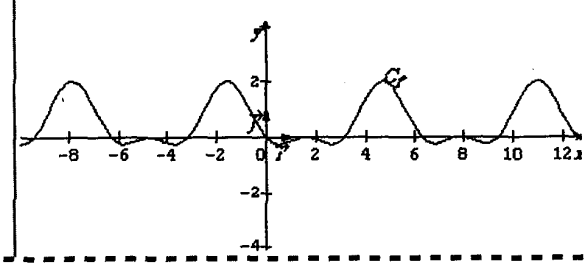
c) Puisque $-1 \leq \frac{2}{3} \leq 1$ il résulte $\lim_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ et par suite
$\lim_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n \overbrace{|u_0 - t_0|}^{\neq 0 \ (constante)} = 0$ ce qui donne $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = t_0}$

Exercice n° 24

$x \in IR, x + 2\pi \in IR$ *et*
$$f(x + 2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) - \sin(x + 2\pi)$$
$$= \sin^2 x - \sin x = f(x)$$
Donc f est périodique de période $T = 2\pi$
Par suite on étudie f sur $[-\pi, \pi]$
f est dérivable sur IR et on a :
$f'(x) = 2\sin x \cos x - \cos x = \cos x \times (2\sin x - 1)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ *ou* $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [-\pi, \pi]$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}$ *ou* $x = \frac{5\pi}{6}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

On trace C_f sur $[-\pi, \pi]$ puis la complète par les translations des vecteurs $2k\pi\vec{i}$



g(x)=cos(3x)cos²(x)

● $x \in IR, x+2\pi \in IR$ et

$g(x+2\pi)=\cos(3(x+2\pi))\cos^2(x+2\pi)$

$=\cos(3x+3\times 2\pi)\cos x=\cos 3x\cos^2 x=f(x)$

Donc g est périodique de période $T=2\pi$

Aussi on a :

$x \in IR, -x \in IR$ et

$g(-x)=\cos(3(-x))\cos^2(-x)=\cos 3x\cos^2 x=g(x)$

Donc g est paire par suite on étudie f sur $[0,\pi]$

On construit C_g sur $[0,\pi]$ puis par symétrique par rapport à la droite des ordonnées on obtient le graphe de C_g sur $[-\pi,\pi]$ finalement on complète C_g par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$

- Etude des variations de g :

g est dérivable sur IR et on a :

$g'(x)=-3\sin 3x\cos^2 x-2\sin x.\cos x.\cos 3x$

Or on sait que : $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ (*voir cours nombre complexe partie linéarisation*)

Donc :

$g(x)=(4\cos^3 x-3\cos x).\cos^2 x=4\cos^5 x-3\cos^3 x$

$\Leftrightarrow$

$g'(x)=-20\sin x.\cos^4 x+9\sin x.\cos^2 x$

$=\sin x.\cos^2 x.(9-20\cos^2 x)$

Sur $[0,\pi]$ le signe de g'(x) est celui de $9-20\cos^2 x$

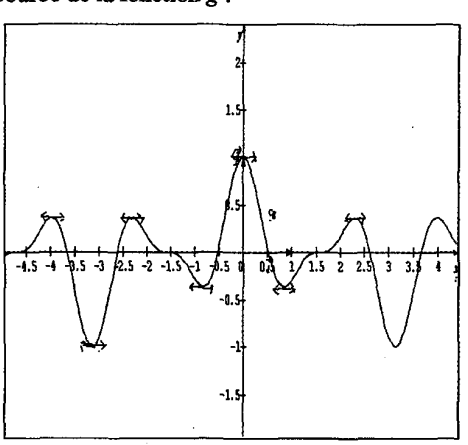
$9-20\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{9}{20} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{3}{2\sqrt{5}}$

En utilisant une calculatrice on trouve :

$x\approx 48^\circ \approx \frac{4\pi}{5}$ | $x\approx 132^\circ \approx \frac{11\pi}{5}$

x	0	$\frac{4\pi}{15}$	$\frac{11\pi}{15}$	π
g'(x)	−	0 +	0 −	
g(x)	1 ↘	(−0.35) ↗	0.35 ↘	−1

Courbe de la fonction g :



Exercice n° 25

● a) $x \in$ IR , g dérivable car $x^2+1>0$

$g'(x)=0+\frac{\sqrt{x^2+1}-x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})}, \forall x \in IR$

b) $g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})}>0, \forall x \in IR$

x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	0 ↗	2

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ (0)

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=1-1=0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ (0)

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1+1=2$

On a : $g(IR)=]0.2[\Rightarrow g(x)>0$

●a) $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1}$

$x \in IR, f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)>0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]$

$=\lim_{x\to-\infty} -1+\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}+x).(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}\right]$

$=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=-1+\frac{1}{+\infty}=-1$

la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

c)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	$+\infty$

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+x^2}-x\right]$$

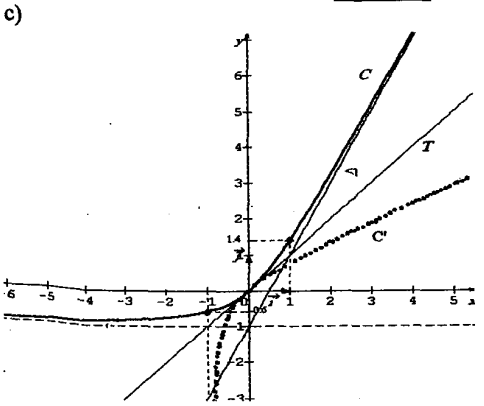
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Donc la droite $\Delta : y=2x-1$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$

b) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow \boxed{T: y=x}$

c)



a) f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur l'intervalle

J= $g(IR)=]-1;+\infty[$

b) on a f(1)= $\sqrt{2}$ *donc* $f^{-1}(\sqrt{2})=1$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(\sqrt{2})=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

c) Voir repère $(O,\vec{i},\vec{j})$